

١. التمرينات المحلولة:

١. ليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً و $A \subseteq X$ مجموعة جزئية و $x_0 \in X$ نقطة ملاصقة لـ A. أثبت أنه إذا كان f مستمراً في x_0 فإن النقطة $f(x_0)$ ملاصقة للمجموعة $f(A)$.

لتكن V جواراً كيفياً لـ $f(x_0)$ وبما أن f مستمر في x_0 فإن $f^{-1}(V)$ جوار لـ x_0 وبما أن x_0 نقطة ملاصقة لـ A أي أن $x_0 \in \bar{A}$ فإن كل جوار لـ x_0 يتقاطع مع A أي أن: $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$

يوجد نقطة [illegible] ولتكن x حيث أن $x \in f^{-1}(V) \cap A$ وبأخذ الصورة المباشرة للطرفين نجد
$f[f^{-1}(V) \cap A] \subseteq f f^{-1}(V) \cap f(A) \subseteq V \cap f(A)$
ومنه $V \cap f(A) \neq \emptyset \Leftarrow f(x_0)$ ملاصقة لـ $f(A)$

---

٢. أثبت أن $\bar{A} = \acute{A} \cup A$ ثم أثبت أن A مغلقة إذا وفقط إذا كان $\acute{A} \subseteq A$

نفرض أن A مغلقة $\Leftarrow A = \bar{A}$ [illegible]
$\bar{A} = \acute{A} \cup A \Leftarrow A = \acute{A} \cup A$ ومنه $\acute{A} \subseteq A$ وبالعكس
وبفرض أن $\acute{A} \subseteq A \Leftarrow \bar{A} = A \cup A = A \Leftarrow A$ مغلقة

---

٣. ليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً [illegible]
[illegible] f [illegible]
نفرض A مجموعة مغلقة من [illegible] $A \Leftarrow X$ [illegible]
وبما أن f مستمر والتطبيق [illegible]
$f(A)$ مجموعة جزئية من Y [illegible]
ومنه $f(A)$ مجموعة مغلقة من Y والصورة [illegible]
مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة $\Leftarrow f$ التطبيق مغلق.

---

٤. f, g تطبيقان مستمران من X إلى الفضاء الهاوسدورفي Y
أثبت أن $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ مجموعة مغلقة في X.

يوجد تطبيق وحيد λ من الفضاء X إلى الفضاء Y^2 حيث
$\lambda: X \to Y^2 = Y \times Y$ والمعرفة بالشكل $x \mapsto (f(x), g(x))$ و $\lambda = (f, g)$
و $P_1 \circ \lambda = f$ و $P_2 \circ \lambda = g$ وبما أن التطبيقين f, g
مستمرين فإن λ مستمر وبالتالي الصورة العكسية لأي
مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة ولأن Y هاوسدورفي [illegible]
فإن Δ من الفضاء Y^2 مغلقة وبالتالي الصورة العكسية
$\lambda^{-1}(\Delta) = (f, g)^{-1}(\Delta)$ مغلقة في X والصورة العكسية لـ
Δ هي التي [illegible] $f(x) = g(x)$.

---

٥. [illegible] f, g [illegible] على كل X [illegible]
[illegible] مجموعة كثيفة من X [illegible]
[illegible]

نفرض أن f, g يتطابقان على A [illegible] مجموعة كثيفة ونفرض
أن B المجموعة [illegible] التي يتطابق عليها (f, g) و A
كثيفة ينتج أن $A \subseteq B$ و $\bar{A} = X$ وبما أن A مغلقة
[illegible] $\bar{A}$ [illegible] كثيفة [illegible] X
[illegible] $X \subseteq B \Leftarrow B = X$.

---

٦. X [illegible] (١) X [illegible] (٢) [illegible]
$\{x\}$ مغلقة [illegible] $x \in X$.

(٢ ⇐ ١) [illegible] $\{x\}$ مغلقة [illegible] $x \neq y$ [illegible]
نقطة ما حيث $y \in X \setminus \{x\}$ [illegible] $N(x)$
النقطة x [illegible] y [illegible] $X \setminus \{x\} \Leftarrow \cup V(x) \subseteq X \setminus \{x\} = X \setminus \{x\}$
[illegible] $X \setminus \{x\}$ [illegible] $\{x\}$ مغلقة
(١ ⇐ ٢) $\{x\}$ مغلقة [illegible] $\{y\}$ مغلقة [illegible] $X \setminus \{y\}$ [illegible]
[illegible] $X \setminus \{y\}$ [illegible] X [illegible]
[illegible] X [illegible]

٧- لدينا f تطبيق من الفضاء التبولوجي X إلى Y ، إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة في Y هي مجموعة مغلقة في X فإننا نثبت أن f تطبيق مستمر.

لتكن G مجموعة كيفية مفتوحة في Y فإن المجموعة (Y/G) مغلقة في Y لأن G مفتوحة في Y وحسب الفرض فإن $f^{-1}(Y/G)$ مغلقة في X ولكن

$$f^{-1}(Y/G) = f^{-1}(X\setminus f^{-1}(G)) = X\setminus f^{-1}(G)$$ [redacted]

ومنه نجد $X\setminus f^{-1}$ مغلقة في X أي أن $f^{-1}(G)$ مفتوحة في X وبذلك فإن f مستمر مغلقة.

٨- أثبت أن ... التطبيق ... .

$\pi: X \to X/\rho$ التطبيق الطبيعي $x \mapsto [x]$ هو تطبيق مستمر وغامر وبالتالي تكون X/ρ مترابطة والتطبيق المستمر يحافظ على الترابط.

٩- A مجموعة جزئية ① A مفتوحة ② A جوار لكل نقطة من نقاطها.

①⇐②) نفرض A مجموعة مفتوحة ولتكن $x \in A$ عنصراً تكون A جوار لـ x وذلك لأن $x \in A \subseteq A$ ومنه فإن x ... A جوار لكل نقطة من نقاطها.

②⇐①) نفرض A جوار لكل نقطة من نقاطها ... أي نقطة $x \in A$ توجد مجموعة مفتوحة I_x بحيث أن $x \in I_x \subseteq A$ ولدينا $A = \bigcup_{x\in A}$ ... وكل نقطة ... مفتوحة في ... $A \subseteq \bigcup_{x\in A} I_x \subseteq A$ وبالتالي $A = \bigcup_{x\in A}\{x\} \subseteq$ ومنه $A = \bigcup_{x\in A} I_x$ اجتماع لمجموعات مفتوحة مجموعة مفتوحة.

١٠- ... الجداء ... متراص

لأن تطبيق الإسقاط $P_\alpha: X \to X_\alpha$ تطبيق مستمر وغامر وبما أن X متراصة فإن X_α [redacted] ... متراصة.

١١- يكون f مستمراً ... إذا كان $f(\bar A) \subseteq \overline{f(A)}$

f ... لتكن A مجموعة جزئية كيفية $A \subseteq X$ ولدينا $A \subseteq \bar A$ وبالتالي $f(A) \subseteq f(\bar A)$ ومنه $\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\bar A)}$ وبما أن $\bar A$ مغلقة و f مغلقة فإن

$$\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\bar A)} = f(\bar A) \Rightarrow \overline{f(A)} \subseteq f(\bar A)$$

ولنفرض أن العكس ... تم ثبت أن f مغلق ... لتكن مغلقة كيفية $A \subseteq X$ ... مغلقة ... $A = \bar A$ ومنه $f(A) = f(\bar A)$ وحسب الفرض.

$\overline{f(A)} \subseteq f(\bar A)$ إذن: $\overline{f(A)} \supseteq f(\bar A)$

ومنه $f(\bar A) = \overline{f(A)}$.

١٢- ... ① ... ② ... f مستمر ...

نفرض أن f ... حسب تعريف ... وكذلك f^{-1} مستمر ... $f: Y \to X$ ... مجموعة مفتوحة ... X ولتكن صورتها العكسية وفق f^{-1} مجموعة مفتوحة في Y ... f مستمر ومفتوح.

$$(f^{-1})^{-1}(u) = f(u) \Rightarrow$$

١٣- ... $g\circ f$ تطبيق مستمر.

لتكن w مجموعة مفتوحة في Z وبما أن g مستمر فإن صورتها العكسية وفق g هي $g^{-1}(w)$ مجموعة مفتوحة في Y وبما أن f مستمر فإن الصورة العكسية وفق f لـ $g^{-1}(w)$ هي $f^{-1}(g^{-1}(w))$ وهي مجموعة مفتوحة في X ولكن $f^{-1}(g^{-1}(w)) = (g\circ f)^{-1}$ أي هي الصورة العكسية وفق التركيب $g\circ f$ لأي مجموعة مفتوحة في Z هي مجموعة مفتوحة في X هذا يعني أن التركيب تطبيق مستمر.

الطوبولوجي العام

ثانياً: التعاريف الهامة:

١- القاعدة التبولوجية: (X,T) فضاء تبولوجي و B أسرة المجموعات المفتوحة أي $B \subseteq T$ تسمى الأسرة قاعدة للتبولوجي T إذا كانت أي مجموعة مفتوحة من T تساوي اجتماع لعناصر من B.

٢- القاعدة الجزئية: (X,T) فضاء تبولوجي و S أسرة مجموعات مفتوحة $S \subseteq T$ تسمى S قاعدة جزئية من التبولوجي T إذا كانت أسرة التقاطعات المنتهية لعناصر S تشكل قاعدة لهذا التبولوجي.

٣- الفضاء المتراص: إذا كانت كل تغطية مفتوحة لهذا الفضاء تحوي على تغطية جزئية منتهية.

٤- متراص إذا وفقط إذا كانت أي أسرة من المجموعات المغلقة التي تحقق خاصية التقاطع مع أسرة جزئية منتهية تقاطعها غير خالٍ.

٥- الفضاء المترابط: إذا كان لا يساوي اجتماع مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين ومنفصلتين.

٦- هو الفضاء الذي لا يقبل التقسيم

٧- هو الفضاء الذي يحقق $A \neq \emptyset \neq B$ حيث $A \cup B = X$ و $A \cap B = \emptyset$ ، $A, B \in T$

٨- مسلمة قابلية العد الأولى: نقول عن الفضاء أنه يحقق مسلمة قابلية العد الأولى إذا كان لكل نقطة من نقاط الفضاء التبولوجي قاعدة جوارات محلية قابلة للعد على الأكثر منتهية أو غير منتهية وكل فضاء يحقق مسلمة العد الأولى.

٩- مسلمة قابلية العد الثانية: نقول عن الفضاء أنه يملك قاعدة قابلة للعد على الأكثر منتهية وغير منتهية.

١٠- الفضاء ... f مستمر في النقطة x_0 إذا كان من أجل أي جوار W لـ $f(x_0)$ يوجد جوار V لـ x_0 بحيث $f(V) \subseteq W$

- f مستمر في x_0 إذا كانت الصورة العكسية لأي جوار لـ $f(x_0)$ هو جوار لـ x_0.

- f مستمر في X إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط الفضاء X.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

١١- مسلمة الفصل الأولى: من أجل أي نقطتين من الفضاء التبولوجي يوجد لإحداهما جوار لا يحوي النقطة الأخرى ويسمى الفضاء الذي يحققها T_0 فضاء.

١٢- مسلمة الفصل الثانية: من أجل أي نقطتين مختلفتين من الفضاء التبولوجي يوجد لكل منهما جوار لا يحوي النقطة الأخرى ويسمى الفضاء الذي يحققها T_1 فضاء

- T_1 فضاء إذا كانت A مجموعة منتهية من الفضاء التبولوجي X فإن A مغلقة (كل T_2 هو T_1)

- مثال: (X,T) حيث X غير منتهية $T = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ منتهية}\} \cup \{\emptyset\}$ هو T_1 فضاء وليس T_2 فضاء

١٣- مسلمة الفصل الثالثة: من أجل أي نقطتين مختلفتين (x,y) من فضاء تبولوجي X يوجد جوار U لـ x ويوجد جوار V لـ y وهذان الجواران لا يتقاطعان $U \cap V = \emptyset$ ويسمى الفضاء المحقق لهذه المسلمة فضاء هاوسدورف أو T_2 فضاء.

١٤- النقطة الحدية (التراكمية): (X,T) فضاء و $A \subseteq X$ و $x \in X$ تسمى x نقطة حدية للمجموعة A إذا كان كل جوار لـ x يتقاطع مع A بنقطة مختلفة عن x لا تنتمي لـ A ومستمر.

ملاحظة: (X,τ) فضاء طوبولوجي و x نقطة منه فإن U يسمى جوار لـ x اذا وجدت مجموعة مفتوحة $G \in \tau$ بحيث أن $x \in G \subseteq U$

التعديل المعاكس.

مكافئات المبرهنات :

١٢- $f: X \to Y$ تكون مستمرة عند x_0 اذا وفقط اذا كانت الصورة العكسية لاي جوار لـ $f(x_0)$ هو جوار لـ x_0 .

⇐ نفرض هنا f مستمرة عند x_0 وهذا يعني من أجل أي جوار N لـ $f(x_0)$ يوجد جوار M لـ x_0 بحيث $f(M) \subseteq N$ وبأخذ الصورة العكسية $M \subseteq f^{-1} f(M) \subseteq f^{-1}(N)$ ∴ وبما أن M جوار لـ x_0 و $f^{-1}(N)$ تحتوي M فإن $f^{-1}(N)$ جوار لـ x_0 .

⇒ نفرض أن الشرط محقق ونثبت أن f مستمرة ولتكن N جوار كيفي لـ $f(x_0)$ في Y حسب الفرض يكون لدينا $f^{-1}(N) = M$ جوار لـ x_0 في X وبأخذ الصورة المباشرة فيه $f(M) = f f^{-1}(N) \subseteq N$ ومنه وجد الجوار الكيفي M عند جوار $f^{-1}(N)$ وتحقق شرط الاستمرار.

١٥- $f: X \to Y$ تطبيق مفتوح إذا وفقط إذا كانت الصورة المباشرة لأي جوار للنقطة x يكون جوار للنقطة $f(x)$ لأي $x \in X$

نأخذ نقطة كيفية $x \in X$ وجوار كيفي M لهذه النقطة وحسب تعريف الجوار توجد مجموعة مفتوحة مثل U .

$x \in U \subseteq M \Rightarrow f(x) \in f(U) \subseteq f(M)$ بما أن $f(U)$ مجموعة مفتوحة في Y فإن $f(M)$ جوار لـ $f(x)$ وذلك لأنه يحوي مجموعة مفتوحة تحوي $f(x)$

١٦- فضاء القسمة لفضاء متراص متراص.

نأخذ التطبيق القانوني ويسمى الاسقاط الطبيعي وهو

$p: X \to X/\rho$ ، $x \to [x]$

وهذا مستمر وغامر لأن الصورة X وعليه فإن التطبيق غامر

$X/\rho = p(X)$ متراص وذلك من الترابط.

١٧- X فضاء T_0 إذا وفقط إذا كان $\{\bar{y}\} \neq \{\bar{x}\}$

⇐) نفرض أن X فضاء T_0 ولتكن (x,y) نقطتين مختلفتين وحسب التعريف يوجد لإحداهما جوار x لا يحوي y أي $x \notin \{\bar{y}\}$ ولكن $x \in \{\bar{x}\}$ ⇐ $\{\bar{y}\} \neq \{\bar{x}\}$

⇒) نفرض الشرط محقق ونفرض جدلاً أن الفضاء ليس T_0 فضاء وهذا يعني أن أي جوار لـ x يحوي y وأي جوار لـ y يحوي x أي أن $\{\bar{x}\} \subseteq \{\bar{y}\}$ و $\{\bar{y}\} \subseteq \{\bar{x}\}$ أي $\{\bar{x}\} = \{\bar{y}\}$ وهذا تناقض مع الفرض.

Date / 1 /

Subject

التمارين اللازمة:

1- [illegible] الفضاء غير متراص.

لأن أسرة المجموعات [illegible] تشكل تغطية مفتوحة له ولا يوجد من تغطية جزئية منتهية لأن أي تغطية [illegible] منتهية [illegible] غير منتهية.

2- [illegible] الفضاء [illegible].

A [illegible] الفضاء $A \neq \phi$, $A \neq R$ [illegible] مفتوحة [illegible] تشكل تقسيم [illegible] الفضاء ← الفضاء غير مترابط.

3- [illegible] الفضاء [illegible].

[illegible] مفتوحتين غير خاليتين [illegible] مع الواحد.

4- [illegible].

[illegible] $X \neq Y$ من الفضاء [illegible]

$\{x\}$ [illegible] x [illegible] y

$\{y\}$ [illegible] y [illegible] x.

[illegible]

لدينا حالات عندما يكون متقطع أو غير متقطع

← حلول [illegible]

(الفضاء غير متقطع) :-

$A^{\circ} = \phi \qquad A' = A \qquad \bar{A} = A$

$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^{\circ} = A \setminus \phi = A$

$Ext(A) = X \setminus \bar{A} = X \setminus A$

حيث A هي المجموعة المعطاة بنص السؤال.

← حلول [illegible]

(الفضاء المتقطع) :-

$\mathring{A} = A \qquad A' = \phi \qquad \bar{A} = A$

$Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = A \setminus A = \phi$

$Ext(A) = X \setminus \bar{A} = X \setminus A$

[illegible]